ملاحظة:

كل زمرة تبولوجية تكون زمرة نصف تبولوجية ولكن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.

البرهان:

واضح من التعريف أن كل زمرة تبولوجية تكون زمرة نصف تبولوجية ومن أجل إثبات أن العكس غير صحيح يكفي أن نعطي مثالاً عن ذلك

لتكن $G=R$ مجموعة الأعداد الحقيقية وهي زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الجمع لنزود $G$ بالتبولوجيا التي قاعدتها $\{[a,b[\}$ جميع المجالات المفتوحة من اليمين

(من أجل أي جوار $[a,b[$ للعنصر $a$ فإن $[a,\frac{b}{2}[$ تكون أيضاً جواراً للعنصر $a$)

ومنه ينتج أن التطبيق $g$ يكون مستمراً من $G\times G=R\times R$

$g_1(1,4)=5$ فعلاً $1,4\in R\times R$.

إن $[5,6[$ هو جوار للعنصر 5. إن $[1,2[$ جوار للعنصر 1، $[4,5[$ جوار للعنصر 4 تتوضح مثلاً المجال $[1,2[$ إنما نفتح بتراجع المسافة بين 1,2 ونقترب من العدد نصف نقطة البداية أي $[1,1.5[$ للجوار

بالاعتماد على الملاحظة السابقة نجد أن $[1,1.5[$ هو جوار للعنصر 1 وأن $[4,4\frac{1}{2}[$ جوار للعنصر 4 وأن

$$g_1([1,1\tfrac{1}{2}[\times[4,4\tfrac{1}{2}[)=[5,6[\subseteq[5,6[$$

نستنتج أن $g$ مستمر وبالتالي $G$ هي زمرة نصف تبولوجية كما أن $g_2:R\to R$ حيث $g_2(x)=-x$ ليس مستمراً وذلك من أجل النقطة 0 فإن $g_2(0)=0$ ومن أجل أي جوار $[0,x[$ للنقطة 0 (في المستقر) لا يمكن إيجاد جوار $V$ لـ $x$ بحيث يكون $g(V)\subseteq[0,x[$ (أعداد موجبة، أعداد سالبة) وبالتالي $g_2$ ليس مستمراً على $R$ وبالتالي فإن $G$ ليست زمرة تبولوجية

ملاحظة:

إذا وضعنا $U.V=\{xy: x\in U, y\in V\}$ ، $U^{-1}=\{x^{-1}; x\in U\}$

حيث $U, V$ مجموعتان جزئيتان من $G$ بالنسبة للجمع فإن

$-U=\{-x ; x\in U\}$ $\qquad$ $U+V=\{x+y ; x\in U , y\in V\}$

ممكن عندئذ كتابة شرط استمرار كل من $g$ و $h$ بالشكل التالي:

يكون $g$ مستمراً في $x$ (أو في $y$) إذا وفقط إذا كان من أجل أي جوار $W$

للنقطة $xy$ توجد جوارة $U$ (أو $V$) للنقطة $x$ (أو النقطة $y$) بحيث يكون

$Uy\subseteq W$ (أو $xV\subseteq W$)

وإذا كانت $G$ تبديلية عندئذ فإن شرط الاستمرار من اليمين واليسار لـ $g$ يكونا متكافئين

إضافة لذلك فإن $g$ يكون مستمراً في $x$ و $y$ معاً إذا وفقط إذا كان من أجل أي

جوار $W$ لـ $xy$ توجد جوارة $U$ لـ $x$ و $V$ لـ $y$ بحيث يكون $UV\subset W$

وبطريقة مشابهة يكون $g_2$ مستمراً إذا وفقط إذا كان من أجل أي جوار $W$ للنقطة $x^{-1}$

توجد جوارة $U$ للنقطة $x$ بحيث يكون $U^{-1}\subseteq W$

مبرهنة:

ليكن $a$ عنصراً ثابتاً في الزمرة التوبولوجية $G$ عندئذ فإن كل من التطبيقين

$\rho_a: G\to G$, $x\to xa$ $\qquad$ $\lambda_a: G\to G$, $x\to ax$ يكون هوميومورفيزم (توبولوجيا)

البرهان:

لنبرهن أن $\rho_a$ هوميومورفيزم

واضح أن $\rho_a$ تقابل، لتكن $W$ جواراً ما للنقطة $xa$ وبما أن $G$ زمرة توبولوجية

فإن التطبيق $g_2: G\times G\to G$, $(x,y)\to xy$, $(x,a)\to xa$ مستمر في كل من $x$ و $y$ فإنه توجد جوارة $U$

للنقطة $x$

بحيث يكون $\rho_a(U)=Ua\subseteq W$ وهذا يعني أن $\rho_a$ مستمر في النقطة $x$

توضيح (أي الجوار للنقطة $x$ والذي هو $U$ صورته وفق $\rho_a$ تكون محتواة في جوار النقطة $xa$)

وبما أن $x$ اختياري من $G$ فإن $\rho_a$ مستمر على $G$

وبما أن $\rho_a^{-1}: G\to G$, $xa\to x$ يطابق التطبيق $\rho_{a^{-1}}: G\to G$, $x\to xa^{-1}$ نستنتج أن التطبيق

$\rho_a^{-1}$ مستمر على $G$ وبالتالي فإن $\rho_a$ هوميومورفيزم

بنفس الطريقة نبرهن أن $\lambda_a$ هوميومورفيزم

مبرهنة :

لتكن $F$ مجموعة مغلقة $P$ مجموعة مفتوحة و $A$ مجموعة جزئية من الزمرة الطبولوجية $G$ و $a \in G$ عنصر ثابت يكون

① $Fa$ ، $aF$ مجموعات مغلقات

② $Pa$ ، $aP$ ، $AP$ ، $PA$ مجموعات مفتوحة

البرهان :

① بما أن $\rho_a$ هوميومورفيزم فإن صورة المجموعة المغلقة $F$ وعند هذا التطبيق تكون مغلقة أي أن $\rho_a(F) = Fa$

بنفس الطريقة نجد أن $\lambda_a(F) = aF$ (تكون مغلقة لأن $\lambda_a$ هوميومورفيزم)

② بما أن $\rho_a(P) = Pa$ تكون مفتوحة لأن صورة مجموعة مفتوحة وفق الهوميومورفيزم

$\lambda_a(P) = aP$ "

$AP = \bigcup_{a \in A} aP$ مفتوحة لأن اجتماع مجموعات مفتوحة

$PA = \bigcup_{a \in A} Pa$ "

مبرهنة :

لتكن $G$ زمرة طبولوجية فمن أجل أي عنصرين $x_1, x_2 \in G$ يوجد هوميومورفيزم $f$ من $G$ بحيث يكون $f(x_1) = x_2$

البرهان :

لتكن $x_1^{-1} x_2 = a \in G$ فإذا أخذنا التطبيق $f: G \to G$ فإن يكون هوميومورفيزم لأنه
$x \to xa$

يطابق $\rho_a$ ومن ناحية أخرى فإن $f(x_1) = x_1 a = x_1 x_1^{-1} x_2 = e x_2 = x_2$